

# Sekundärelektronen und -photonen der $\mu$ -Mesonen in festen Materialien

Von K. OTT und H. PREUSS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforsch. 12 a, 451–465 [1957]; eingegangen am 11. März 1957)

Die integralen Energiespektren der die  $\mu$ -Mesonenkomponente auf Seehöhe in fester Materie begleitenden Elektronen und Photonen wurden für C-, Fe- und Pb-Schichten mit Dicken von 0 bis 50 g/cm<sup>2</sup> und Energien zwischen 0 und 100 MeV berechnet.

Die Ergebnisse werden in Form von Kurven angegeben.

## 1. Einleitung

Die  $\mu$ -Mesonenkomponente der kosmischen Strahlung überträgt wegen ihrer schwachen Wechselwirkung mit Nukleonen den größten Teil ihrer Energie an die Elektronen-Photonenkomponente. Dabei sind (von  $\mu$ -Nukleon-Wechselwirkung sei abgesehen) grundsätzlich zwei Prozeßarten möglich, der Zerfallsprozeß ( $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + 2\nu$ ) einerseits und „Stoßprozesse“ andererseits. Als solche kommen in Frage das „Herausstoßen“ (knock-on) von Elektronen aus der Atomhülle, die direkte Erzeugung von Elektronenpaaren und die Abstrahlung von Bremsquanten. Die beiden letzteren machen nur dann einen merklichen Prozentsatz des Energieverlustes aus, wenn die Energie des  $\mu$ -Mesons extrem hoch ist ( $> 10^{11}$  eV). In großen Tiefen (unter Grund) kommt die mittlere Energie der  $\mu$ -Mesonen in diese Größenordnung, so daß dann ein merklicher Beitrag der Begleitelektronen durch direkte Paarerzeugung und Bremsquantenemission erzeugt wird (vgl. HAYAKAWA und TOMONAGA<sup>1</sup>). Bei der Berechnung des Sekundärelektronenspektrums in Seehöhe, die im folgenden vorgenommen werden soll, braucht nur der knock-on-Prozeß berücksichtigt zu werden. Von den Zerfalls-elektronen kann abgesehen werden, da nur die in einer Materieschicht von einer Dicke der Größenordnung 10 cm „entstehenden“ Elektronen betrachtet werden und auf solche kleinen Strecken  $\mu$ -e-Zerfälle sehr unwahrscheinlich sind.

## 2. Problemstellung

Ein  $\mu$ -Meson der Gesamtenergie  $E_\mu$  durchquere eine Materieschicht der Dicke  $d$ . Darin löst es Stoß-elektronen mit der Energieverteilung Gl. (1) aus, von denen die energiereichsten die Schicht verlassen können. Den Energieverlust der  $\mu$ -Mesonen kann

<sup>1</sup> S. HAYAKAWA u. S. TOMONAGA, Progr. Theor. Phys. 4, 496 [1949].

man bei nicht zu großer Schichtdicke  $d$  vernachlässigen, da experimentell zu ihrer Identifizierung eine gewisse Durchdringungsfähigkeit (vgl. I, 2) gefordert wird, so daß mit überwiegender Wahrscheinlichkeit nur diejenigen  $\mu$ -Mesonen registriert werden, deren in der Meßschicht verlorene Energie klein ist gegen ihre Gesamtenergie.

Die angestoßenen Elektronen werden durch Ionisation und Emission von  $\gamma$ -Strahlen abgebremst (vgl. II, 2 u. 3). Außerdem erleiden sie vielfache COULOMB-Streuungen, und ihre Bahn schließt schon nach dem Stoßprozeß einen gewissen Winkel mit der des  $\mu$ -Mesons ein (vgl. I, 1), wodurch die Anzahl derjenigen Elektronen, die die Schicht verlassen können, noch weiter vermindert wird (vgl. II, 4 u. 5).

In III wird das Energiespektrum der Bremsquanten untersucht, die von den (von den  $\mu$ -Mesonen) direkt angestoßenen Elektronen (sie sollen im folgenden als erste Generation bezeichnet werden) emittiert werden. Paarerzeugungs- und COMPTON-Prozesse führen dann zu weiteren Elektronengenerationen. Davon wird die II. Generation im IV. Abschnitt berechnet.

Um einen direkten Vergleich mit den Ergebnissen von WILSON-Kammer und Zählrohrexperimenten zu ermöglichen, wurde mit dem (auf 1 normierten)  $\mu$ -Mesonenspektrum auf Seehöhe als auslösendem Spektrum gerechnet, so daß alle angegebenen Teilchenzahlen pro  $\mu$ -Meson zu verstehen sind. Der Einfluß der Form dieses Spektrums wird in V abgeschätzt.

## I. Grundlegende Betrachtungen

### 1. Der Primärprozeß

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein  $\mu$ -Meson der Gesamtenergie  $E_\mu$  und dem Spin 1/2 auf der Strecke  $dx$  (cm) einem ruhenden freien Elektron eine kinetische Energie zwischen  $E$  und  $E + dE$  über-



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

trägt, ist gegeben durch (vgl. z. B. ROSSI und GREISEN<sup>2</sup>)

$$\sigma(E, E_\mu) dE dx = \frac{C}{\beta^2 E^2} \left[ 1 - \beta^2 \frac{E}{E_m} + \frac{1}{2} \left( \frac{E}{E_\mu} \right)^2 \right] dx, \quad (1)$$

worin  $\beta c$  die Mesonengeschwindigkeit und  $E_m$  nach (4) die maximal übertragbare Energie ist. Wird  $dx$  in Strahlungslängen ( $x_0$ ) gemessen, dann ist  $C$  gegeben durch

$$C = 2 \pi Z r_0^2 \frac{N_L}{A} \varrho m c^2 x_0 = 0,300 \frac{Z}{A} \varrho m c^2 x_0. \quad (2)$$

Darin ist  $Z$  die Kernladungszahl,  $A$  das Atomgewicht und  $\varrho$  die Dichte der durchstrahlten Materie,  $N_L$  die LOSCHMIDTSche Zahl,  $r_0$  der klassische Elektronenradius ( $2,82 \cdot 10^{-13}$  cm) und  $m$  die Masse des Elektrons. Eine Tabelle der Strahlungslängen findet sich z. B. in l. c.<sup>3</sup>. Hier wird benutzt:  $(x_0)_C = 26,7$  cm,  $(x_0)_Fe = 1,75$  cm,  $(x_0)_{Pb} = 0,567$  cm.

Das dritte Glied in (1) stellt den Spineinfluß dar, es ist sehr klein und wird im folgenden fortgelassen. Außerdem setzen wir  $\beta = 1$ , was aus folgenden Gründen erlaubt ist: Der Faktor  $\beta^2$  in dem Glied  $-\beta^2 E/E_m$  beeinflußt das Ergebnis praktisch nicht, da er nur bei großem  $E$  ( $E \lesssim E_m$ ) ins Spiel kommt und solche großen Energien wegen des Faktors  $1/E^2$  selten sind; in  $C/\beta^2$  dagegen ist der Einfluß etwas stärker, er bleibt jedoch im Rahmen der experimentellen Unsicherheit des  $\mu$ -Mesonenspektrums, mit dem  $\sigma$  später multipliziert werden muß. Wir können deshalb in guter Näherung mit

$$\sigma(E, E_\mu) dE dx = C \frac{dE}{E^2} \left( 1 - \frac{E}{E_m} \right) dx \quad (1a)$$

rechnen.

Aus der relativistischen Stoßgleichung ergibt sich zwischen  $E$ ,  $E_\mu$  und  $\vartheta$ , dem Winkel zwischen der Elektronen- und  $\mu$ -Mesonenrichtung, wenn wir die Ruhemasse des  $\mu$ -Mesons mit  $\mu$  bezeichnen:

$$E = 2 m c^2 \frac{(E_\mu^2 - \mu^2 c^4) \cos^2 \vartheta}{(m c^2 + E_\mu)^2 - (E_\mu^2 - \mu^2 c^4) \cos^2 \vartheta}, \quad (3)$$

und daraus für die maximal übertragbare Energie  $E_m$

$$E_m = 2 m c^2 \frac{E_\mu^2 - \mu^2 c^4}{2 m c^2 E_\mu + \mu^2 c^4}, \quad (4)$$

worin  $m^2 \ll \mu^2$  benutzt ist. Aus (3) ergibt sich für  $\cos^2 \vartheta$ :

$$\cos^2 \vartheta = \frac{(m c^2 + E_\mu)^2}{E_\mu^2 - \mu^2 c^4} \cdot \frac{E}{E + 2 m c^2}. \quad (5)$$

<sup>2</sup> B. ROSSI u. V. GREISEN, Rev. Mod. Phys. **13**, 240 [1941].

<sup>3</sup> W. HEISENBERG, Vorträge über kosmische Strahlung, Verlag Springer, Berlin 1953, S. 329.

Darin liegt der erste Faktor für nicht zu kleine  $E_\mu$  sehr nahe bei 1, so daß wir schreiben können:

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{E}{E + 2 m c^2}}. \quad (6)$$

Die folgenden Formeln schreiben sich einfacher, wenn man für  $\mu$ -Mesonen und Elektronen verschiedene Energieeinheiten einführt, und zwar die jeweiligen Ruheenergien. Dann ist

$$E_m = 2 \frac{E_\mu^2 - 1}{\delta E_\mu + 1} \quad \text{mit } \delta = \frac{2 m c^2}{\mu c^2} = 0,00935. \quad (7)$$

## 2. Das Spektrum der $\mu$ -Mesonen auf Seehöhe

Aus den Messungen von GLASER u. a.<sup>4</sup> ergibt sich für das differentielle Spektrum (Vertikalintensität) der  $\mu$ -Mesonen auf Seehöhe im Rahmen der experimentellen Genauigkeit

$$m(E_\mu) dE_\mu = \frac{200 dE_\mu}{(22,4 + E_\mu)^{2,5}} \quad (8)$$

mit  $E_\mu$  in Einheiten  $\mu c^2$ .

Da bei experimentellen Untersuchungen über Stoßelektronen zur Identifizierung der  $\mu$ -Mesonen eine Mindestreichweite gefordert und die Anzahl der Stoßelektronen auf die der  $\mu$ -Mesonen bezogen wird, haben wir das Spektrum (8) oberhalb einer der Mindestreichweite entsprechenden Energie auf 1 zu normieren. Als Mindestreichweite wählen wir 20 cm Blei, was einer Mindestgesamtenergie von  $3,72 \mu c^2$  (vgl. z. B. die Energie-Reichweite-Kurven in l. c.<sup>3</sup>, S. 575) entspricht. Die Abhängigkeit der Ergebnisse von dieser Annahme wird in Abschnitt V untersucht, und für Abschneideabständen von etwa 5 bis 150 cm Blei ein Umrechnungsfaktor angegeben.

## II. Das integrale Spektrum der Stoßelektronen ( $N^I$ )

### 1. Gang der Berechnung von $N^I(E, d)$

Verstehen wir unter  $\bar{E}(E, t)$  die Energie, die ein Elektron am Erzeugungsort  $t$  (in Strahlungslängen  $x_0$ ;  $x/x_0 = t$  = Abstand vom Schichtende) haben muß, wenn es die Schicht mit  $E$  verlassen soll, dann ist die Anzahl der [darin von einem Spektrum der Form (8)] ausgelösten Elektronen, die mit einer

<sup>4</sup> D. A. GLASER, B. HAMERMASCH u. G. SAFONOV, Phys. Rev. **80**, 625 [1950].

Energie größer als  $E$  aus einer Materieschicht der Dicke  $d$  herauskommen, gegeben durch

$$N^I(E, d)$$

$$= \int_0^d dt \int_D^\infty m [E_\mu(E_m)] \frac{dE_\mu}{dE_m} dE_m \int_{\bar{E}(E, t)}^{E_m} \sigma(E', E_\mu) dE'. \quad (9)$$

Darin ist  $D$  die Maximalenergie der von den energieärmsten  $\mu$ -Mesonen ausgelösten Elektronen:

$$D = E_m (E_\mu = 3,72 \text{ } \mu c^2) = 24,7 \text{ } m c^2$$

nach (4).

Die mittlere Integration in (9) ist für  $E(E, t) \leq D$  von  $D$ , für  $\bar{E}(E, t) \geq D$  von  $\bar{E}$  bis  $\infty$  zu führen.

Durch Vertauschen der beiden letzten Integrierten in (9) und durch Einsetzen von  $\sigma$  nach (1 a) ergibt sich:

$$N^I(E, d)$$

$$= C \int_0^d dt \int_{\bar{E}(E, t)}^\infty \frac{dE'}{E'^2} \int_D^\infty m [E_\mu(E_m)] \frac{dE_\mu}{dE_m} \left(1 - \frac{E'}{E_m}\right) dE_m. \quad (10)$$

Das letzte Integral in (10) läßt sich streng berechnen. Die zweite Integration wurde damit numerisch ausgeführt und das Ergebnis, die Verteilung über den Herkunftsor, läßt sich als Funktion der unteren Grenze  $\bar{E}(E, t)$  (im folgenden immer in Einheiten  $m c^2$  gemessen) durch  $F(\bar{E})$  nach (11) annähern:

$$\int_E^\infty dE' \int_D^{E'} dE_m = F(\bar{E}) \quad (11)$$

$$= \frac{1}{E} \frac{a_0}{a_1 + E} \left\{ 1 + \frac{a_2}{(a_3 + E)^2} + \frac{a_4 E^2}{(a_5 + E)^4} \right\}$$

mit  $a_0 = 324$ ,  $a_1 = 1000$ ,  $a_2 = 7380$ ,  $a_3 = 59,5$ ,  $a_4 = 28\,700$  und  $a_5 = 70$ . Die Fehler dieser Approximation sind für  $\bar{E} \leq 3000$  ( $m c^2$ ) kleiner als 1% und wachsen mit zunehmendem  $\bar{E}$  (da das Doppelintegral wie  $(E)^{-2,5}$  für große  $E$  abfällt). Auf die uns hier interessierende Anzahl der Stoßelektronen unter einigen hundert MeV haben extrem hohe  $E$ -Werte jedoch keinen merklichen Einfluß, so daß es nicht lohnend erschien, die gebrochene Potenz in die Näherung (11) aufzunehmen.

Damit ist  $N^I(E, d)$  auf die Berechnung des folgenden Integrals zurückgeführt:

$$N^I(E, d) = C \int_0^d dt F[\bar{E}(E, t)], \quad (12)$$

bei dessen Auswertung die Schwierigkeit in der Bestimmung von  $\bar{E}(E, t)$  liegt, also der Energie, die ein Elektron am Orte  $t$  haben muß, wenn es bei  $t=0$  mit genau  $E$  ankommen soll.

Die Berechnung von  $\bar{E}(E, t)$  wird im folgenden stufenweise vorgenommen:

In II, 2 wird so gerechnet, als würden die Stoßelektronen in Richtung des  $\mu$ -Mesons emittiert und anschließend, ohne Vielfachstreuung zu erleiden, durch Ionisationsverluste abgebremst.

In II, 3 wird dann der Energieverlust durch Bremsstrahlung berücksichtigt, während in II, 4 der Einfluß der vom Streuprozeß herrührenden Winkel zwischen  $\mu$ -Meson und Elektronenbahn untersucht wird. In II, 5 wird die noch fehlende Vielfachstreuung berücksichtigt und mit dem sich für  $\bar{E}(E, t)$  ergebenden Ausdruck wird das Integral (12) berechnet.

Um den Einfluß der einzelnen Effekte übersehen zu können, wurde jeweils  $N^I(d)$  für einige  $E$ -Werte berechnet. Speziell für  $E=0$  und C und Pb als Absorptionsmaterial wurden die Ergebnisse in Abb. 1 und 2 dargestellt.

## 2. $N^I$ bei reiner Ionisationsbremsung ( $N_j^I$ )

Da der Energieverlust durch Ionisation aus sehr vielen kleinen Energieabgaben besteht, sind die praktisch vorkommenden Schwankungen sehr gering, so daß in guter Näherung von einem kausalen Energieverlauf gesprochen werden kann. Soll also ein Elektron am Schichtende die Energie  $E$  haben, so muß es am Erzeugungsort (Abstand  $t$  vom Schichtende) eine genau bestimmte Energie  $\bar{E}_j(E, t)$  haben (der Index  $j$  soll auf Ionisationsbremsung hinweisen).

$\bar{E}_j(E, t)$  wird aus dem differentiellen Energieverlust bestimmt, der bei kinetischen Elektronenenergien größer als  $2 m c^2$  praktisch konstant ist, bei  $E \leq m c^2$  jedoch mit  $1/v^2$  anwächst ( $v$  = Elektronengeschwindigkeit). Einen für die Rechnung bequemen und für unsere Zwecke hinreichend genauen Ausdruck für den differentiellen Energieverlust durch Ionisation hat man in der folgenden Gleichung

$$\frac{d\bar{E}_j}{dt} = \frac{\varepsilon}{\beta^2} = \frac{\varepsilon}{1 - (1 + E_j)^{-2}} \quad (13)$$

( $m c^2$  als Energieeinheit). (Da die Fortpflanzungsrichtung der Elektronen die Richtung abnehmender  $t$ -Werte sein soll, ist der Energieverlust scheinbar positiv.)  $\varepsilon$  ist in (13) der bei großen Energien

praktisch konstante Ionisationsverlust pro Strahlungslänge, der hier etwas kleiner gewählt wird als die in der Theorie der Elektronen-Photonenkaskade benutzte kritische Energie (zur Unterscheidung von  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon_k$  bezeichnet), da hier die mittlere Energie des Elektronenquellspektrums kleiner ist als in der Kaskade. Wir benutzen in Blei, Eisen und Kohle folgende Werte:

$$\varepsilon_{\text{Pb}} = 14 \text{ m} c^2, \quad \varepsilon_{\text{Fe}} = 40 \text{ m} c^2, \quad \varepsilon_{\text{C}} = 140 \text{ m} c^2 \quad (14)$$

statt

$$(\varepsilon_k)_{\text{Pb}} = 7,6 \text{ MeV}, \quad (\varepsilon_k)_{\text{Fe}} = 21,7 \text{ MeV},$$

$$(\varepsilon_k)_{\text{C}} = 81 \text{ MeV}.$$

Durch Integration von (13) ergibt sich sofort unter Beachtung der Randbedingung  $\bar{E}_j(E, 0) = E$

$$E_j = \frac{1}{2} \{ \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + 4)} \} \quad (15)$$

mit

$$\alpha = \varepsilon t + \frac{E^2}{E + 1}.$$

Damit erhält man die Elektronen der ersten Generation unter ausschließlicher Berücksichtigung der Ionisationsbremsung [nach (12) und (13)]:

$$N_j^I(E, d) = C \int_{\bar{E}}^{\bar{E}_j(E, d)} d\bar{E}_j \left( 1 - \frac{1}{(\bar{E}_j + 1)^2} \right) F(\bar{E}_j). \quad (16)$$

Nach Ausführung der elementaren Integration wurde  $N_j^I(E, d)$  für einige  $E$ -Werte berechnet. Für Kohle und Blei und speziell  $E=0$  wurden die Ergebnisse in Abb. 1 und 2 dargestellt.

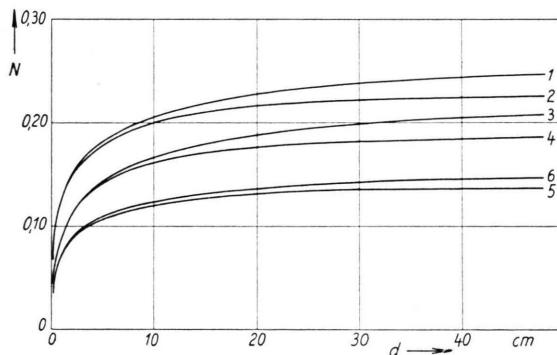


Abb. 1. Kurve 1:  $N_j^I$  mit reiner Ionisationsbremsung ( $N_j^I$ ). Kurve 2:  $N_j^I$  mit Bremsstrahlung ( $N_B^I$ ). Kurve 3:  $N_j^I$  unter Berücksichtigung der Winkel bei der Erzeugung. Kurve 4:  $N_B^I$  unter Berücksichtigung der Winkel bei der Erzeugung ( $N_w^I$ ). Kurve 5:  $N_w^I$  einschließlich Vielfach- und Rückwärtsstreuung [vgl. Abschn. II, 7] ( $N^I$ ). Kurve 6:  $N_I$  und zweite Elektronengeneration ( $N$ ). Absorptionsmaterial: Kohle.

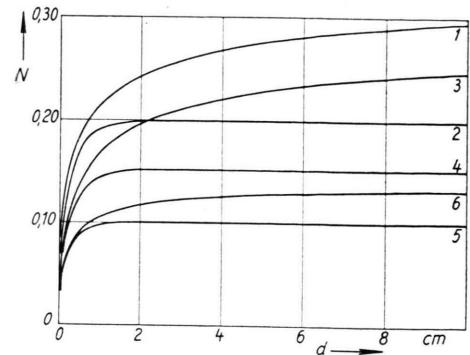


Abb. 2. Wie Abb. 1 mit Blei als Absorptionsmaterial.

### 3. $N_j^I$ unter Berücksichtigung der Bremsstrahlung ( $N_B^I$ )

Im Gegensatz zur Ionisationsbremsung ist die Abstrahlung von  $\gamma$ -Quanten ein „statistischer“ Prozeß, dessen Schwankungen nicht vernachlässigt werden dürfen. Deshalb gibt es zu einer festen Anfangsenergie eines Elektrons keine definierte Endenergie und umgekehrt; d. h. die oben definierte Größe  $\bar{E}(E, t)$  existiert bei Energieverlust durch Bremsstrahlung ( $\bar{E}$  wird in diesem Fall mit  $\bar{E}_B(E, t)$  bezeichnet) nur im Mittel, wobei noch zu überlegen ist, wie dieser Mittelwert gebildet werden muß. Dazu gehen wir auf (10) zurück, setzen aber das letzte Integral zunächst gleich 1, was nach (11) für nicht zu großen Energien eine gute Näherung darstellt. Wegen der Schwankungen des Energieverlustes durch Bremsstrahlung ist der Integrand des mittleren Integrals mit einer Funktion  $W(E', E, t)$  zu multiplizieren, die die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß ein Elektron, das mit der Energie  $E'$  erzeugt wird, im Abstand  $t$  noch eine Energie größer als  $E$  hat, wenn es unterwegs Ionisationsbremsung erleidet und  $\gamma$ -Quanten abstrahlt:

$$N_B^I(E, d) \approx C \int_0^d dt \int_E^\infty \frac{dE'}{E'^2} W(E', E, t). \quad (17)$$

Der oben besprochene Mittelwert  $\bar{E}_B(E, t)$  ist danach wie folgt zu definieren:

$$\frac{1}{E_B} = \int_{E_B}^\infty \frac{dE'}{E'^2} = \int_E^\infty \frac{dE'}{E'^2} W(E', E, t). \quad (18)$$

Zur Bestimmung von  $W(E', E, t)$  gehen wir auf die in  $E$  differentielle Wahrscheinlichkeit  $w(E', E'', t)$  zurück, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein mit  $E'$  erzeugtes Elektron bei Berücksichtigung von

Ionisation und Bremsstrahlung nach der endlichen Strecke  $t$  noch genau die Energie  $E''$  hat. Der Zusammenhang mit  $W$  ist dann

$$W(E', E, t) = \int_E^{E_{\max}} w(E', E'', t) dE'' ; \quad (19)$$

$E_{\max}$  ist darin die Energie, die ein Elektron nach  $t$  maximal noch haben kann. Wenn es durch Ionisationsbremsung den Betrag  $E_j$  verliert, dann ist offenbar

$$E_{\max} = E' - E_j , \quad (20)$$

da eine gewisse Wahrscheinlichkeit (eventuell Null) dafür besteht, daß es durch Bremsstrahlung keine Energie verliert.

Bei Vernachlässigung der Ionisationsbremsung wurde diese Wahrscheinlichkeitsverteilung (wir wollen sie in diesem Falle mit  $w_B$  bezeichnen) von BETHE und HEITLER<sup>5</sup> berechnet:

$$w_B(E', E'', t) = \frac{(\ln E'/E'')^{t-1}}{\Gamma(t)} \frac{dE''}{E'} . \quad (21)$$

Dabei wurde für den Wirkungsquerschnitt des einzelnen Emissionsprozesses ( $E_\gamma$  Photonenenergie;  $E'' = E' - E_\gamma$ ) der folgende Ausdruck benutzt:

$$N \sigma(E' E_\gamma) dE_\gamma dx = dt \frac{dE_\gamma}{E' \ln(E'/E' - E_\gamma)} \quad (22)$$

( $N$  = Anzahl der Atome pro  $\text{cm}^3$ ,  $\sigma$  ist der Wirkungsquerschnitt). Für kleine  $E_\gamma$  ergibt sich daraus asymptotisch:

$$N \sigma(E', E_\gamma) dE_\gamma dx \approx \frac{dE_\gamma}{E_\gamma} dt .$$

Aus (21) folgt durch elementare Integration für den mittleren differentiellen Energieverlust ( $t$  ist dabei durch  $dt$  zu ersetzen)

$$-\overline{dE'} = \int_0^{E'} E_\gamma w_B(E', E'', dt) \frac{dE''}{dE_\gamma} dE_\gamma = E' \ln 2 dt . \quad (23)$$

Für die mittlere Endenergie  $\overline{E''}$  ergibt sich

$$\overline{E''}(t) = \int_0^{E'} E'' w_B(E', E'', t) dE'' = E' 2^{-t} . \quad (24)$$

In nullter Näherung kann man so rechnen, als hätten alle Teilchen denselben Energieverlauf (den mittleren):

$$\overline{E''}(t) = E' 2^{-t} , \quad (24a)$$

was sich auch aus (23) ergibt, wenn man annimmt, daß an jeder Stelle der Energieverlust gleich dem mittleren ist:

$$-\frac{dE''}{dt} = E'' \ln 2 . \quad (23a)$$

Die Berücksichtigung einer konstanten Ionisationsbremsung führt in diesem Fall, da sich die differentiellen Energieverluste addieren, an Stelle von (23) auf

$$-\frac{dE''}{dt} = E'' \ln 2 + \varepsilon$$

mit der Lösung:

$$E''(t) = E' \cdot 2^{-t} + \frac{\varepsilon}{\ln 2} (2^{-t} - 1) . \quad (25)$$

Daraus läßt sich sofort die Energie gewinnen, die ein Elektron bei  $t$  bekommen muß, wenn es bei  $t=0$  mit  $E$  ankommen soll [in der Näherung (25) mit  $\overline{E}_0$  bezeichnet]:

$$\overline{E}_0 = E \cdot 2^t + \frac{\varepsilon}{\ln 2} (2^t - 1) . \quad (26)$$

Die Berechnung von  $\overline{E}_B(E, t)$ , in dem einerseits die Schwankungen und andererseits eine genauere Form des mittleren differentiellen Energierverlustes als (23) berücksichtigt sind, soll nun auf folgende Weise vorgenommen werden:

Zunächst wird in die Verteilung (21) eine zusätzliche konstante Ionisationsbremsung einbezogen und daraus nach (18)  $E_{0B}$  berechnet [der Index 0 soll auf die Verwendung des Wirkungsquerschnittes (22) hinweisen]. Der Quotient

$$\omega' = \frac{\overline{E}_{0B} - \overline{E}_0}{\overline{E}_{0B}} = 1 - \omega \quad (27)$$

mit  $\overline{E}_0$  nach (26) stellt dann den Einfluß der Schwankungen dar, und zwar als relative Abweichung der Größe  $\overline{E}_0$  bezogen auf  $\overline{E}_{0B}$ . Man kann nun annehmen, wenn man in  $\overline{E}_0$  einen genaueren Wirkungsquerschnitt verwendet ( $\overline{E}_0 \rightarrow \overline{E}_1$ ), daß die Abweichung zum richtigen  $\overline{E}_B$  in guter Näherung durch denselben Faktor  $\omega$  [nach (27)] geliefert wird. Zu dieser Annahme ist man berechtigt, da die vollständige Vernachlässigung der Schwankungen, also die Benutzung einer  $\delta$ -Funktion  $\delta(E - \overline{E}_0)$  statt (28), nur zu maximal 4% Fehler in  $N^I$  führt.

Der Einfluß der Ionisationsbremsung auf die Verteilung (21) ist prinzipiell der folgende. Die Elektronen, die bei reiner Bremsstrahlung hinter einer Dicke  $t$  in dem Endenergiereintervall  $dE''$  bei  $E''$  zu finden sind, haben bei zusätzlicher Ionisationsbremsung eine kleinere Endenergie  $E_j''$  (in  $dE_j''$ ). Geben wir  $E_j''$  vor, dann ist die Endenergie bei reiner Bremsstrahlung offenbar eine Funktion der Anfangsenergie  $E'$ , von  $E_j''$  und dem Ionisationsverlust  $\varepsilon t$ . Damit geht die Verteilung (21) über in

$$w(E', E_j'', t) dE_j'' = \frac{\left( \ln \frac{E'}{E''(E', E_j'', \varepsilon t)} \right)^{t-1}}{E' \Gamma(t)} \frac{dE''}{dE_j''} dE_j'' . \quad (28)$$

In nullter Näherung verlieren die Elektronen einfach zusätzlich die Energie  $\varepsilon t$ :

$$E_j'' = E'' - \varepsilon t .$$

<sup>5</sup> H. A. BETHE u. W. HEITLER, Proc. Roy. Soc., Lond. A, **146**, 83 [1934].

Tatsächlich ist aber die Endenergie geringer, da wegen der durch die Ionisationsbremsung herabgesetzten mittleren Energie längs einer speziellen Elektronenbahn die in Form von Photonen abgestrahlte Energie abnimmt. Einen genaueren Wert für die Endenergie  $E_j''$  erhält man durch die folgende Überlegung: Eine herausgegriffene Gruppe von Elektronen, die von der Energie  $E'$  ausgehend nach der Strecke  $t$  bei reiner Bremsstrahlung in das Intervall  $dE''$  bei  $E''$  gelangt, hat im Mittel einen exponentiellen Energieverlauf, der sich in Analogie zu (23) durch die folgende Differentialgleichung beschreiben lässt ( $0 \leq t' \leq t$ ):

$$\frac{dE'}{dt'} = -\beta E',$$

in der  $\beta$  durch die beiden Randbedingungen sich bestimmt zu

$$\beta = \frac{1}{t} \ln \frac{E'}{E''}.$$

Bei Berücksichtigung des Energieverlustes durch Ionisation gilt statt dessen:

$$\frac{dE'}{dt'} = -(\beta E' + \varepsilon)$$

mit demselben  $\beta$ , woraus sich der genauere Wert der Endenergie ergibt:

$$E_j'' = E'' - \frac{\varepsilon t}{\ln(E'/E'')} \left(1 - \frac{E''}{E'}\right). \quad (29)$$

Daraus ist  $E''(E', E_j'', \varepsilon t)$  zu bestimmen und in (28) einzusetzen. Wir erhalten dann die integrale Wahrscheinlichkeitsverteilung aus (28) und (19) mit

$$\begin{aligned} E_{\max} &= E' - \varepsilon t : \\ W(E', E, t) &= \int_E^{E'-\varepsilon t} w(E', E_j'', t) dE_j'' \\ &= \int_{E''(E', E, \varepsilon t)}^{E'} w_B(E', E'', t) dE''. \end{aligned}$$

Führen wir  $y = \ln[E'/E''(E', E, \varepsilon t)]$  als Integrationsvariable ein, dann ergibt sich

$$W(E', E, t) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{y_{\max}} e^y y^{t-1} dy = \frac{\gamma(t, y_{\max})}{\Gamma(t)},$$

worin  $\gamma(t, y_{\max})$  die unvollständige Gammafunktion ist mit  $y_{\max} = \ln[E'/E''(E', E, \varepsilon t)]$ . Damit haben wir für die in (27) definierte Funktion  $\omega$ :

$$\omega(E, t) = \frac{E_0}{\Gamma(t)} \int_{E+\varepsilon t}^{\infty} \frac{dE'}{E'^2} \int_0^{y_{\max}} e^y y^{t-1} dy.$$

Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge ergibt sich unter Benutzung von (29)

$$\omega(E, t) = \frac{E_0}{\Gamma(t)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2y} y^{t-1}}{E + \frac{\varepsilon t}{y} (1 - e^{-y})} dy, \quad (30)$$

speziell für  $E = 0$  ist

$$\omega(0, t) = \frac{2^t - 1}{\ln 2} [\zeta(t+1) - 1], \quad (30 \text{ a})$$

worin  $\zeta$  die RIEMANNSCHE  $\zeta$ -Funktion bezeichnet. Folgende Grenzwerte, die sich aus (30) leicht ableiten lassen, geben einen qualitativen Überblick über  $\omega(E, t)$ :

$$\omega(E, 0) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{E \rightarrow \infty} \omega(E, t) = 1 \quad \text{für alle } t.$$

Der erste Grenzwert ist sofort verständlich, während der Wert 1 für große  $E$  daher kommt, daß für ein  $1/E^2$ -Spektrum in (18) bei Benutzung des Wirkungsquerschnittes (22)  $\omega$  gerade 1 wird, wie man mit (21) leicht nachrechnen kann. Den Einfluß der Ionisationsbremsung kann man sich als eine Deformierung des Spektrums  $1/E^2$  vorstellen, die dann um so stärker wird, je mehr die Ionisationsbremsung gegen die Bremsstrahlung aufkommt, d. h. je kleiner die Energie wird. Deshalb nimmt  $\omega$  bei festem  $t$  monoton mit  $E$  ab bis zum Wert (30 a) bei  $E = 0$ .

Nach (teilweise numerischer) Ausführung des Integrals (30) wurde für  $\omega(E, t)$  eine Näherungsformel aufgestellt, die dann in den weiteren Rechnungen benutzt wurde. Damit ist

$$\frac{1}{E_B(E, t)} = \frac{\omega(E, t)}{E_1(E, t)}, \quad (31)$$

worin  $E_1(E, t)$ , wie schon oben betont, als Verbesserung von  $\bar{E}_0$  nach (26) den mittleren Energieverlauf darstellt. Als Ausdruck für den differentiellen Bremsstrahlverlust benutzen wir dabei

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_B = \frac{E^2}{E+b}, \quad (32)$$

der den ganzen Energiebereich recht gut beschreibt. Für die Konstante  $b$  wurden die Werte  $5 m c^2$  in Blei,  $8 m c^2$  in Fe und  $12 m c^2$  in Kohle verwendet. Mit Ionisationsbremsung, die wir zunächst als konstant annehmen, geht die letzte Gleichung über in (wobei wir wieder die Richtung abnehmender  $t$  als Fortpflanzungsrichtung wählen)

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{E_1^2}{E_1+b} + \varepsilon; \quad (32 \text{ a})$$

daraus läßt sich leicht  $t(E_1)$  bestimmen, die Auflösung nach  $E_1$ , die explizit gebraucht wird, kann jedoch nur numerisch ausgeführt werden. Das Ergebnis schreiben wir in der folgenden Form

$$E_1(E, t) = \frac{1}{\varrho(E, t)} \{a_1(E) e^t - a_2(E)\} \quad (33)$$

mit

$$a_1(E) = \frac{E^2}{E+b} + \varepsilon, \quad a_2(E) = a_1(E) - E \quad (33 \text{ a})$$

und einer langsam veränderlichen Funktion  $\varrho(E, t)$ , die wegen der besonderen Wahl der Aufspaltung (33) das gleiche Grenzverhalten hat wie  $\omega(E, t)$ . Deshalb ist  $\bar{E}_B(E, t)$  für große Energien durch (33) gegeben

und für alle Energien (außer extrem kleinen) durch

$$\bar{E}_B(E, t) = \frac{a_1 e^t - a_2}{\omega(E, t) \varrho(E, t)}. \quad (34)$$

In (34) ist aber noch der  $1/v^2$ -Anstieg der Ionisationsbremsung bei kleinen Energien vernachlässigt. Da in diesem Bereich die Bremsstrahlung keine Rolle spielt, wird hier  $\bar{E}$  schon durch  $\bar{E}_j$  richtig geliefert. Andererseits gibt bei großen  $\bar{E}$ -Werten  $\bar{E}_B$  die richtige Beschreibung. Beides kann man hinreichend genau berücksichtigen, indem man statt (34) setzt:

$$E_B = \frac{\bar{E}_1}{\omega} + E_j - (E + \varepsilon t), \quad (34 \text{ a})$$

da sich bei kleinen Argumenten der erste Term verhält wie

$$\frac{\bar{E}_1}{\omega} \approx E + \varepsilon t$$

und der zweite bei großem Argument

$$E_j \approx E + \varepsilon t,$$

also in jedem Bereich der überschüssige Term sich gerade mit  $E + \varepsilon t$  kompensiert.

Mit (34 a) wurde das integrale Spektrum der aus einer Schicht herauskommenden Stoßelektronen berechnet, worin dann die Bremseffekte, aber noch keine Wegverlängerung berücksichtigt sind:

$$N_B^I(\bar{E}, t) = C \int_E^{\bar{E}} dt F[\bar{E}_B(E, t)]$$

nach (12).

Für Kohle, Blei und  $E = 0$  wurden die Ergebnisse in Abb. 1 und 2 dargestellt.

#### 4. Berücksichtigung der Winkel beim Stoßprozeß ( $N_W^I$ )

Außer durch die in den letzten beiden Abschnitten besprochenen Bremseffekte verringert sich die Anzahl derjenigen Stoßelektronen, denen ein Verlassen der Schicht möglich ist, weiter durch die Tatsache, daß ihre Bahn (insbesondere bei kleinen Energien) nach dem Stoß einen von Null verschiedenen Winkel ( $\vartheta$ ) mit der des Mesons einschließt. Bezeichnen wir der Kürze halber die Energie eines Elektrons beim Stoßprozeß mit  $\eta$ , so gilt nach I, (6) für den Cosinus dieses Winkels:

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{\eta}{\eta+2}}. \quad (35)$$

Daraus sieht man, daß der hier zu besprechende Effekt praktisch keine Rolle spielt, wenn dem Elektron beim Stoß eine Energie  $\eta \gg 2 m c^2$  übertragen wird. Da nun bei denjenigen Elektronen, deren

Anfangsenergie mit  $2 m c^2$  vergleichbar ist, der Energieverlust durch Bremsstrahlung nur eine untergeordnete Rolle spielt, wollen wir zunächst davon absehen (vgl. den Schluß dieses Abschnittes) und nur die Ionisationsbremsung berücksichtigen. (Im nächsten Abschnitt wird diese Einschränkung wieder aufgehoben.) Weiterhin nehmen wir (ebenfalls nur in diesem Abschnitt) vereinfachend an, daß ein unter dem Winkel  $\vartheta$  angestoßenes Elektron diese Richtung bis zum Verlassen der Schicht oder bis zu seiner völligen Abbremsung beibehält. Wir rechnen zunächst so, als lege das Elektron statt  $t$  den Weg

$$t' = \frac{t}{\cos \vartheta} = t \sqrt{1 + \frac{2}{\eta}} \quad (36)$$

zurück.

Unter diesen Annahmen ist nun diejenige Energie  $\bar{E}$  (hier  $\bar{E}_{0w} = \eta$  genannt; der Index 0w soll auf „Winkel beim Stoßprozeß“ ohne Berücksichtigung der Bremsstrahlung hinweisen) zu berechnen, die ein Elektron am Stoßort „ $t'$ “ mitbekommen muß, wenn es bei  $t=0$  mit der Energie  $E$  ankommen soll. Nach (15) gilt offenbar ( $\varepsilon t$  wird im folgenden mit  $k$  bezeichnet):

$$\eta = \bar{E}_j[E, t/\cos \vartheta(\eta)] = \frac{1}{2} \{ \alpha' + \sqrt{\alpha'(\alpha'+4)} \} \quad (37)$$

mit

$$\alpha' = k \sqrt{1 + \frac{2}{\eta}} + \frac{E^2}{E+1}. \quad (37 \text{ a})$$

Daraus ergibt sich durch elementare Umformung für  $\eta$  die folgende Gleichung fünften Grades:

$$\eta^5 - \frac{2E^2}{E+1} \eta^3(\eta+1) + \frac{E^4}{(E+1)^2} \eta(\eta+1) - k^2(\eta+2)(\eta+1)^2 = 0. \quad (38)$$

Gibt man  $\eta$  und  $E$  vor, dann läßt sich daraus leicht  $k(\eta, E)$  bestimmen. Da für die weiteren Rechnungen (II, 5) für  $\eta(E, k)$  ein geschlossener Ausdruck nötig ist, wurde  $\eta(E, k)$  durch die folgende Näherungsformel dargestellt:

$$\eta = E + \left\{ k + (\alpha + \beta) \frac{k + C_0}{k + C_1} \right\} \frac{k}{k + \beta} \quad (39)$$

mit

$$\alpha = 2 - \frac{E}{E+1}, \quad \beta = \frac{C_0 \alpha}{C_1 \zeta - C_0},$$

$$C_0 = 2,71, \quad C_1 = 5,97$$

und

$$\zeta = \frac{(E+1)^2}{2E} \sqrt{\frac{E+2}{0,25E^3+E^2+E}}.$$

Dabei wurde u. a. die jeweils ersten beiden Glieder der asymptotischen Entwicklungen für kleine und große  $k$  benutzt, wodurch der Fehler im ganzen Bereich auf wenige Promille heruntergedrückt werden konnte (außer wenn  $E$  und  $k$  gleichzeitig klein gegen 1 sind, was aber praktisch ohne Bedeutung ist).

Um einen Überblick über die Größe des „Winkel einflusses“ zu bekommen, wurde zu  $N_B^I$  mit Hilfe von (39) eine additive Korrektur berechnet, die offenbar in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} N_w^I &= N_B^I - \Delta N_w, \quad \text{wobei} \\ \Delta N_w &= C \int_{\bar{E}_j(E, d)}^{\bar{E}_w(E, d)} F[E_{0w}(E, x)] \frac{dt}{dx} dx \end{aligned} \quad (40)$$

mit  $x = \bar{E}_j(E, t)$ , was sofort aus (12) folgt, wenn man bedenkt, daß die Integrationsgrenzen in (40) nur für kleine  $\bar{E}_j$  merklich voneinander verschieden sind [nach (37)] und deshalb die Bremsstrahlung keinen Einfluß hat [ $\bar{E}_{0w}(E, t)$  ist in (40) in der Form  $E_{0w}[E, \bar{E}_j(E, t)]$  dargestellt].

In den weiteren Rechnungen muß jedoch auch in  $\bar{E}_w$  die Bremsstrahlung mitberücksichtigt werden, da  $N^I$  geschlossen berechnet werden soll [d. h. ohne Benutzung der Aufspaltung (40), die bei Wegverlängerung infolge Vielfachstreuung nicht mehr zweckmäßig ist]. Dann ist offenbar die Definitionsgleichung (37) zu ersetzen durch

$$\bar{E}_w = \bar{E}_B \left( E, t \sqrt{\frac{E_w + 2}{E_w}} \right) \quad (41)$$

mit  $\bar{E}_B$  nach (34 a).

Aus (41) wurde  $\bar{E}_w$  durch Iteration bestimmt und damit nach (40)  $\Delta N_w$  berechnet.  $N_w^I = N_B^I - \Delta N_w$  wurde in Abb. 1 und 2 für Kohle und Blei ( $E = 0$ ) dargestellt.

### 5. Der Einfluß der Vielfachstreuung

#### a) Allgemeines

In den vorangehenden Abschnitten wurde so gerechnet, als würden die Elektronen ihre beim Stoß bekommene Richtung bis zum Verlassen der Schicht oder bis zu ihrer Absorption beibehalten. Durch vielfache COULOMB-Streuungen werden sie jedoch aus dieser Richtung abgelenkt und legen so einen größeren Weg zurück (der im folgenden mit „ $l$ “ bezeichnet werden soll, im Gegensatz zu „ $t$ “, der Wegkomponenten in Richtung der  $\mu$ -Mesonenbahn).

Der Einfluß dieser Wegverlängerung läßt sich mit Hilfe eines geeignet gebildeten mittleren Weges „ $l$ “ beschreiben, der von seiner „Projektion  $t$ “ und der Energie der Elektronen abhängt. Insbesondere interessieren wir uns für den mittleren Weg derjenigen Elektronen, die mit einer vorgegebenen Energie  $E$  die Schicht  $t$  verlassen:  $\bar{l}(E, t)$ . Mit Hilfe dieser

Größe läßt sich dann die zur Berechnung von  $N^I$  [nach (12)] erforderliche Energie  $\bar{E}(E, t)$ , die ein im Abstand  $t$  vom Schichtende angestoßenes Elektron im Mittel mitbekommen muß, um die Schicht mit  $E$  verlassen zu können, in der folgenden Form schreiben:

$$\bar{E}(E, t) = \bar{E}_B [E, \bar{l}(E, t) / \sqrt{E/E + 2}], \quad (42)$$

woraus dann  $E$  durch Iteration bestimmt werden muß [ $\bar{E}_B$  nach (34 a)].

#### b) Berechnung des mittleren Weges

Elektronen der Energie  $E'$  mögen senkrecht auf eine Schicht der Dicke  $t$  auffallen und nach vielfachen COULOMB-Streuungen die Schicht mit der Winkelverteilung  $\varphi(\tau, x^2)$  verlassen. Darin sei  $x$  der Tangens des Winkels  $\alpha$ , den ein heraustrittendes Elektron mit seiner Primärrichtung einschließt:  $x = \tan \alpha$ , und  $\tau(x) \approx x^2(t)$ , etwa das mittlere Tangensquadrat am Schichtende (genauer s. u.). Wir sehen von der Rückwärtsstreuung und zunächst vom Energieverlust der Elektronen ab und können deshalb  $\varphi(\tau, x^2)$  als normiert ansehen:

$$\int_0^\infty dx^2 \varphi(\tau, x^2) = 1.$$

Zur Beschreibung der Verknüpfung des Streuwinkels mit dem zurückgelegten Weg führen wir eine Funktion  $z(t, l, x) dx^2 dl$  ein, die angibt, welcher Bruchteil der Elektronen hinter einer Schicht der Dicke  $t$  mit dem faktischen Weg  $l$  (in  $dl$ ) und dem Winkel  $\alpha$  (in  $dx^2$ ) vorzufinden ist.  $z$  ist in der folgenden Weise zu normieren:

$$\int_t^\infty dl \int_0^\infty dx^2 z(t, l, x^2) = 1.$$

Die einzelnen Integrale haben offenbar folgende Bedeutung:

$$w(t, l) dl = dl \int_0^\infty dx^2 z(t, l, x^2)$$

ist der Bruchteil derjenigen Elektronen, die den Weg  $l$  (in  $dl$ ) zurückgelegt haben \* und

$$\varphi[\tau(t), x^2] dx^2 = dx^2 \int_t^\infty dl z(t, l, x^2)$$

die Winkelverteilung ohne Rücksicht auf den zurückgelegten Weg.

\* Für kleine Winkelablenkungen wurde  $w(t, l)$  von C. N. YANG (Phys. Rev. **84**, 599 [1951]) berechnet.

Da wir annehmen, daß sich  $z$  so entwickelt, daß hinter jeder Schicht die vorgegebene Winkelverteilung realisiert ist, können wir von den Winkelablenkungen in einer infinitesimalen Schicht absehen und  $w$  mit  $z$  durch die folgende Integralrelation verknüpfen:

$$w(t + \Delta t, l) = \int_0^{[(l-t)/\Delta t]^2-1} z(t, l - \Delta t \sqrt{1+x^2}, x^2) dx^2, \quad (43)$$

die besagt, daß man den Bruchteil derjenigen Elektronen, die bei  $t + \Delta t$  den Weg  $l$  zurückgelegt haben, erhält durch Summation über alle die Teilchen, die bei  $t$  den Weg  $l - \Delta t / \cos \alpha = l - \Delta t \sqrt{1+x^2}$  schon hinter sich hatten und dort den Winkel  $\alpha$  ( $x = \tan \alpha$ ) mit der Primärrichtung einschlossen (in  $z$  geht die vorgegebene Winkelverteilung  $\varphi$  ein).

Aus (43) erhält man sofort eine entsprechende Gleichung für den mittleren Weg  $\bar{l}$ , wenn man die von der Definition

$$\bar{l} = \int_i^\infty l w(t, l) dl \quad (44)$$

vorgeschriebene Integration durchführt. Im Limes kleiner  $\Delta t$  ergibt sich daraus für  $\bar{l}$  die plausible Differentialgleichung:

$$\frac{d\bar{l}}{dt} = \int_0^\infty dx^2 \sqrt{1+x^2} \varphi[\tau(t), x^2] = u[\tau(t)] = (1/\cos \alpha) \quad (45)$$

und durch Integration:

$$\bar{l}(E, t) = \int_0^t u[\tau(t')] dt', \quad (46)$$

d. h.  $\bar{l}(t)$  setzt sich additiv zusammen aus den mittleren Teilwegen in allen Schichtelementen, die ja gegeben sind durch

$$dt(1/\cos \alpha) = dt \cdot u(\tau).$$

### c. Die Winkelverteilung vielfach gestreuter Elektronen.

Die Winkelverteilung geladener Teilchen nach vielfachen COULOMB-Streuungen ist nur in den beiden Grenzfällen kleiner und großer mittlerer Winkelquadrat (d. h. bei fester Anfangsenergie: kleiner und großer Schichtdicke) genau bekannt. Bei kleinen Schichtdicken wurde sie zuletzt von MOLIERE<sup>6</sup>

und von SNYDER und SCOTT<sup>7</sup> nach verschiedenen Methoden berechnet. Die Ergebnisse stimmen untereinander und mit genauen Messungen gut überein. Bei großen Dicken stellt sich etwa eine  $\cos^2 \alpha$ -Verteilung ein (vollständige Diffusion, vgl. PAUL und FRANK<sup>8</sup> sowie BETHE, ROSE und SMITH<sup>9</sup>). Da wir hier die Winkelverteilung für alle Dicken benötigen, wollen wir eine Interpolationsformel benutzen, die die beiden oben genannten Grenzfälle richtig enthält und den Zwischenbereich plausibel darstellt. Deren Aufstellung ist natürlich nicht ohne eine gewisse Willkür möglich. Wir setzen

$$\varphi(\tau, x^2) dx^2 = \left( \frac{e^{-x^2/\tau}}{\tau A(\tau)} \frac{g(\tau)}{(\sqrt{1+x^2})^3} + \frac{1.5[1-g(\tau)]}{(\sqrt{1+x^2})^5} \right) dx^2. \quad (47)$$

Der erste Term entspricht der MOLIERESchen Verteilung (mit dem Winkeldifferential  $\sin \alpha d\alpha$  statt  $\alpha d\alpha$  bei MOLIERE) und der zweite der  $\cos^2 \alpha$ -Verteilung.  $\tau$  ist das mittlere Winkelquadrat nach MOLIERE, das hier, da wir uns nicht auf kleine Winkel beschränken können, in ein mittleres  $\tan^2$ -Quadrat umgedeutet wurde.  $A(\tau)$  ist der Normierungsfaktor der MOLIERESchen Verteilung, der hier wegen des veränderten Winkeldifferentials eine andere Form hat als bei MOLIERE:

$$A(\tau) = \frac{2}{\tau} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{1/\tau} \left[ 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\tau}}\right) \right] \right\} \quad (48)$$

(mit  $\Phi$  ist das Fehlerintegral gemeint). Die Gewichtsfunktion  $g(\tau)$  ( $0 \leq g(\tau) \leq 1$ ) bestimmt die relativen Anteile mit denen die beiden Grenzfälle am Aufbau des Zwischenbereiches beteiligt sind.

Die oben erwähnte Willkür besteht einerseits in der in (47) benutzten Additivität\* der beiden Grenzverteilungen, andererseits in der Wahl der Gewichtsfunktion  $g$  (die natürlich in Strenge nicht nur von  $\tau$  abhängen wird). Für  $g$  erschien uns der folgende Ansatz plausibel:

$$g(\tau) = 1/(1+\tau). \quad (49)$$

Das mittlere Winkelquadrat  $\tau$  ist nach MOLIERE<sup>6</sup> durch das folgende Integral gegeben:

$$\tau(t) = \frac{\epsilon}{j} \int_0^t \frac{dt'}{E^2(t')} \quad (50)$$

$$\text{mit } j = \frac{A \epsilon (57.3)^2 (0.511)^2}{B (22.9)^2 Z^2 \rho x_0}. \quad (51)$$

<sup>6</sup> G. MOLIERE, Z. Naturforschg. 3a, 78 [1948].  
<sup>7</sup> H. S. SNYDER u. W. T. SCOTT, Phys. Rev. 76, 220 [1949].

<sup>8</sup> W. PAUL u. H. FRANK, in LANDOLT-BÖRNSTEIN I, 5; Verlag Springer, 6. Aufl., Berlin 1952, S. 325.

<sup>9</sup> H. A. BETHE, M. E. ROSE u. P. SMITH, Proc. Amer. Phil. Soc. 78, 573 [1938].

\* Vgl. hierzu die Bemerkungen im Anschluß an Gl. (57).

Darin ist  $A$  das Atomgewicht und  $\rho$  die Dichte des Streumaterials (die anderen Größen sind schon oben erklärt), und  $B$  berechnet sich aus  ${}_{10}\lg \Omega_b$

$${}_{10}\lg \Omega_b = 8,215 + {}_{10}\lg \left[ Z^{-\frac{1}{2}} \frac{\rho t x_0}{A} \cdot \frac{\alpha^2}{1,13 + 3,76 \alpha^2} \right] \quad (52)$$

mit

$$\alpha = Z/137 \beta$$

nach einer von MOLIÈRE angegebenen Tabelle. Da  $B$  über (52) nur schwach von der Schichtdicke  $t$  abhängt, reicht es aus, einen plausiblen Mittelwert einzusetzen. Man erhält für die hier betrachteten Materialien die folgenden Zahlenwerte:

$$j_c = 0,1245; \quad j_{Fe} = 0,0292; \quad j_{Pb} = 0,0085.$$

(50) stellt eine Integration über das reziproke Quadrat des Energieverlaufs in der Schicht dar. Ist dieser auf Grund von Bremsquantenemission Schwankungen unterworfen, dann ist über alle möglichen Energieverläufe in der Schicht zu mitteln. Da jedoch die Vielfachstreuung nur bei kleinen Energien wesentlich wird und in diesem Fall die Ionisationsbremsung die Photonenemission stark überwiegt, können wir von den Schwankungen absehen und für  $E(t')$  den schon oben ermittelten „quasikausalen“ Energieverlauf [ $E_B$  nach (34 a)] einsetzen (zumal in  $E_B$  ein Teil der hier in Frage kommenden Schwankungen wegen (18) schon berücksichtigt ist):

$$\tau(E, t) = \frac{e}{j} \int_0^t \frac{dt'}{E_B^2(E, t-t')} . \quad (53)$$

In (53) ist jedoch noch von der Wegverlängerung abgesehen, bei deren Berücksichtigung die Energie im Schichtdickenelement stärker abnimmt. Man darf wohl annehmen, daß man den Einfluß dieses Effektes in erster Näherung richtig erfaßt, wenn man die Schichtdickenvariable  $t'$  durch den entsprechenden mittleren Weg ersetzt, also statt (53) schreibt:

$$\tau(E, t) = \frac{e}{j} \int_0^t \frac{dt'}{E_B^2[E, l(t-t')]} . \quad (54)$$

Damit erhält man nach (46) die folgende Integralgleichung für den mittleren Weg  $\bar{l}$  (unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Elektronen in der Schicht erzeugt werden):

$$\bar{l}(E, t) = \int_0^t u(\tau) dt', \quad (55)$$

worin

$$\tau = \tau \left( \frac{e}{j} \int_0^{t'} \frac{dt''}{E_B^2[E, l(t-t'')]} \right).$$

Daraus wurde  $\bar{l}(E, t)$  durch Iteration bestimmt, wobei für  $u(\tau)$  die Form (56) benutzt wurde,

$$u(\tau) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\tau)^2}, \quad (56)$$

die eine ausreichende Näherung des durch elementare Integration von (45) für  $u(\tau)$

$$u(\tau) = \left( \frac{-\text{Ei}(-1/\tau)}{2 \tau \{ e^{-1/\tau} - \sqrt{\pi/\tau} [1 - \Phi(\tau^{-1/2})] \}} + \frac{3}{2} \right) \frac{\tau}{1+\tau} \quad (57)$$

erhaltenen Ausdrucks darstellt. Durch diese Näherung wurde noch eine kleine, in der Form (47) für die Winkelverteilung  $\varphi$  enthaltene Inkonsistenz vermieden.  $u(\tau)$  wird nämlich nach (57) für mäßig große  $\tau$  um wenige Prozent größer als sein Grenzwert  $3/2$ , ein Hinweis darauf, daß die Verteilung (47), ehe sie für große  $\tau$  ihren Grenzwert ( $\cos^2 \alpha$ ) annimmt, etwas breiter ist als eine  $\cos^2 \alpha$ -Verteilung. Man kann leicht einsehen, daß der erste Term in (47) für große  $\tau$  breiter als eine  $\cos^2 \alpha$ -Verteilung wird und daß dann, wenn er zu der letzteren additiv hinzukommt, kurz vor dem Übergang in den Grenzwert eine etwas breitere Verteilung entsteht. Wegen des kleinen Gewichts für große  $\tau$  bleibt der Fehler jedoch im Rahmen der Genauigkeit von (47), doch ist seine Beseitigung in (56) zweifellos eine Verbesserung.

## 6. Die erste Elektronengeneration

Mit Hilfe von  $\bar{l}$  nach (55) wurde die Iteration in (42),  $\bar{E}(E, t)$ , ausgeführt und damit der Integrand von (12) berechnet. Durch numerische Integration ergab sich dann das integrale Energiespektrum der ersten Elektronengeneration, dessen Werte für Kohle, Eisen und Blei zwischen 0 und 100 MeV und für Dicken von 0 bis etwa 50 g/cm<sup>2</sup> mit Hilfe der Elektronischen Rechenmaschine G 1 berechnet wurden. Für  $E=0$  und die Materialien Kohle und Blei sind die Ergebnisse in Abb. 1 und 2 dargestellt.

## 7. Diskussion der Rückwärtsstreuung

Seither wurde von der Streuung nach rückwärts vollständig abgesehen, was sich in einer zwischen 0° und 90° normierten Winkelverteilung  $\varphi(\tau, x^2)$  ausdrückt. Zwar reicht in Wirklichkeit die Verteilung innerhalb der Schicht bis 180°, doch verliert obige Vernachlässigung mit wachsender Mindestenergieforderung rasch an Einfluß, so daß wir weiterhin die Verteilung in der alten Form verwenden werden. In Blei allerdings wird bei kleinen Energien eine stärkere Abweichung zu erwarten sein.

Der nach den obigen Vernachlässigungen verbleibende Teil der Rückwärtsstreuung kann in folgender Weise berücksichtigt werden, indem wir als rückwärts



gestreute Elektronen nur diejenigen zählen, die wegen eines Winkels  $\vartheta > 0$  bei der Erzeugung trotz „nach vorn“ normierter Winkelverteilung einen größeren Winkel als  $\pi/2$  mit dem Mesonenstrahl einschließen (vgl. nebenstehende Abb.).

Danach ergibt sich dann für den Bruchteil  $g(E', t)$  der nach „rückwärts“ gestreuten Elektronen [ $\varphi(\tau, x^2)$  ist darin die Winkelverteilung um die Richtung bei der Erzeugung]:

$$g(E', t) = 2 \int_{E'/2}^{\infty} dx^2 \varphi(\tau, x^2) \int_0^{\chi_0} \frac{d\zeta}{2\pi}$$

mit

$$\chi_0 = \arctg \sqrt{\frac{2x^2}{E'} - 1}$$

(unter Beachtung von  $\cos \vartheta = \sqrt{E'/E' + 2}$ ).

Da sich der Einfluß des hier betrachteten Teils der Rückwärtsstreuung als klein herausstellen wird, können wir für  $\varphi(\tau, x^2)$  eine Näherung in der Form  $(\cos \vartheta)^{2m}$  benutzen, eine Darstellung, die auch ganz allgemein von Interesse sein kann.

Bevor wir die Berechnung von (58) vornehmen, muß  $m$  bestimmt werden. Dies soll nach der Methode der kleinsten Quadrate auf der Einheitskugel durchgeführt werden. Die auftretenden Gleichungen waren nicht streng zu lösen, so daß  $m$  als Funktion von  $\tau$  iterativ ausreichend genau gewonnen wurde. Es ergab sich als gute Näherung:

$$m(\tau) = \frac{1+1,769\tau+1,5\tau^2}{\tau(1+\tau)}. \quad (59)$$

$$\text{Mit } \varphi(\tau, x^2) dx^2 = (m + \frac{1}{2}) \frac{dx^2}{(1+x^2)^{m+3/2}} \quad (60)$$

ergibt sich dann für (58) das Integral

$$g(E', t) = \frac{m + \frac{1}{2}}{\tau} \int_{E'/2}^{\infty} \frac{\arctg \sqrt{(2x^2/E') - 1}}{(1+x^2)^{m+3/2}} dx^2, \quad (61)$$

welches in guter Näherung ( $\leq 3\%$ ) sich schreiben läßt:

$$g(E', t) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{2+E'} \right)^{m+1/2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{0.562}{\sqrt{m+0.775}} \right) \sqrt{\frac{E'}{E'+2}} \right]. \quad (62)$$

Die Rückwärtsstreuungskorrektur ergibt sich dann nach (12) zu

$$N_R(E, k) = \int_0^d dt' \int_E^\infty dE' g(E', t') F(E') \dots \quad (63)$$

Die numerische Berechnung von (63) ergab eine Korrektur an  $N^I$  von maximal 3%, die in den Abb. 6, 7 und 8 berücksichtigt wurde.

### III. Die Energiespektren der $\gamma$ -Quanten

Die  $\gamma$ -Quanten, die in einer Materieschicht einen Strom von  $\mu$ -Mesonen begleiten, sind auf Seehöhe in überwiegender Anzahl durch Abstrahlung der

Stoßelektronen entstanden, da der entsprechende Energieverlust bei der mittleren Energie der  $\mu$ -Mesonen auf Seehöhe etwa um einen Faktor 400 kleiner ist als der der Stoßelektronen mittlerer Energie. Wir können also die unter II berechneten Ergebnisse benutzen, um die Energiespektren der in Frage kommenden Photonen zu bestimmen. Bei deren Berechnung vernachlässigen wir den Winkel, den die Stoßelektronen mit der  $\mu$ -Mesonenbahn bei der Abstrahlung eines  $\gamma$ -Quants einschließen, da nur hochenergetische Elektronen mit merklicher Wahrscheinlichkeit Photonen emittieren, und diese Elektronen mit der  $\mu$ -Mesonenbahn nur einen kleinen Winkel einschließen. Einen größeren Fehler macht dagegen die Vernachlässigung des Winkels zwischen den respektiven Bahnen der Photonen und Elektronen.

Das differentielle Energiespektrum der  $\gamma$ -Quanten ist dann durch das folgende Integral gegeben:

$$\gamma(E, t) = \int_0^t dt' e^{-\vartheta(E)(t-t')} \int_E^\infty w_\gamma(E', E) n(E', t) dE'. \quad (64)$$

Darin ist  $n(E', t)$  das differentielle Spektrum der Stoßelektronen der ersten Generation, also

$$n(E', t) = -\frac{\partial N^I(E', t)}{\partial E'}, \quad (65)$$

$w_\gamma(E', E)$  die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Elektron der Energie  $E'$  auf einer Strahlungslänge ein Photon der Energie  $E$  erzeugt und  $\vartheta(E)$  der totale Absorptionskoeffizient der  $\gamma$ -Quanten der Energie  $E$ .

Das letzte Integral in (64) läßt sich durch partielle Integration auf ein solches über das integrale Spektrum zurückführen, was von Vorteil ist, da die Differentiation in (65) auf numerische Ungenauigkeiten führen würde:

$$-\int_E^\infty w_\gamma(E', E) \frac{\partial N^I(E', t)}{\partial E'} dE' = -[N^I(E', t) w_\gamma(E', E)]_E^\infty + \int_E^\infty N^I(E', t) \frac{\partial w_\gamma(E', E)}{\partial E'} dE',$$

wobei in der eckigen Klammer an der oberen Grenze  $N^I$  und an der unteren Grenze  $w_\gamma(E', E)$  verschwindet, so daß statt (64) für das differentielle Photonspektrum gilt:

$$\gamma(E, t) = \int_0^t dt' e^{-\vartheta(E)(t-t')} \int_E^\infty N^I(E', t) \frac{\partial w_\gamma(E', E)}{\partial E'} dE'. \quad (66)$$

Für  $w_\gamma(E', E)$ , die Wahrscheinlichkeit der Bremsquantenemission benutzen wir den bequemen und

abgesehen von der Ruheenergie der Elektronen genauen von BERNSTEIN<sup>10</sup> angegebenen Ausdruck:

$$w_\gamma(E', E) dE' = \frac{dE}{E} \frac{E'(E-E)}{E'(E'-E)+U} \left[ \left( \frac{E}{E'} \right)^2 - \alpha \left( \frac{E}{E'} \right) + \alpha \right] \quad (67)$$

mit  $\alpha = 1,358$  und

$$U_C = 10,70 \text{ m}c^2, U_{Fe} = 7,61 \text{ m}c^2 \text{ und } U_{Pb} = 6,18 \text{ m}c^2.$$

Der totale Absorptionskoeffizient  $\vartheta(E)$  setzt sich aus einem Paarerzeugungs- und einem COMPTON-Effektanteil zusammen. Der erste, der einer katastrophischen Absorption entspricht, läßt sich aus (67) leicht berechnen (totaler Wirkungsquerschnitt). Beim COMPTON-Effekt dagegen bleibt das Photon erhalten, wenn auch bevorzugt mit kleiner Energie. Man kann jedoch auch für den COMPTON-Prozeß einen effektiven katastrophischen Absorptionskoeffizienten definieren, wenn man den totalen Wirkungsquerschnitt um den Beitrag der übrigbleibenden Photonen erniedrigt, der bei bekannter Form des Photonenspektrums sich leicht berechnen läßt, wobei es jedoch nicht auf große Genauigkeit ankommt, da der Einfluß der übrigbleibenden Photonen auf  $\vartheta(E)$  nur gering ist (vgl. l. c.<sup>3</sup>, S. 517).

Damit läßt sich dann durch numerische Ausführung der Integrationen in (66) das differentielle Photonenspektrum berechnen und daraus durch

$$\int_E^\infty \gamma(E', t) dE' = \Gamma(E, t) \quad (68)$$

das zugehörige integrale Spektrum, dessen Werte für Kohle, Eisen und Blei in Abb. 3, 4 und 5 dargestellt sind. Auf die Wiedergabe von  $\gamma(E, t)$  wurde verzichtet.

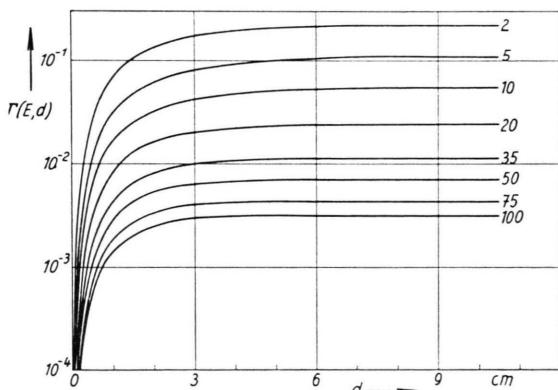


Abb. 3.  $\Gamma(E, d)$ , die Anzahl der  $\gamma$ -Quanten, die eine Pb-Schicht der Dicke  $d$  (in cm) mit einer Energie größer als  $E$  (Parameter in Einheiten  $m c^2$ ) verlassen.

<sup>10</sup> J. B. BERNSTEIN, Phys. Rev. **80**, 995 [1950].

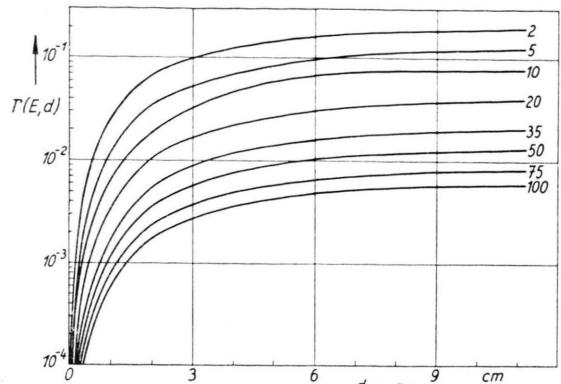


Abb. 4. Wie Abb. 3 mit Fe als Absorptionsmaterial.

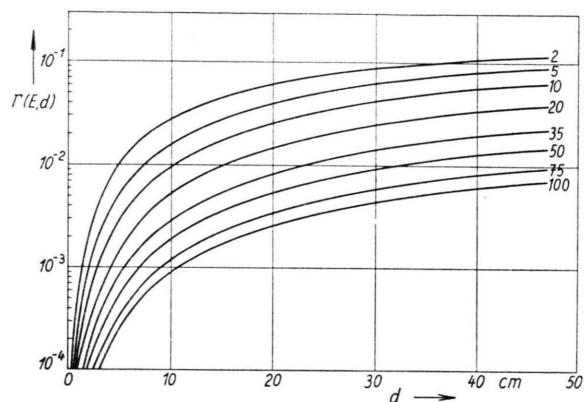


Abb. 5. Wie Abb. 3 mit C als Absorptionsmaterial.

#### IV. Die zweite Elektronengeneration

Aus dem im letzten Abschnitt berechneten Photonenspektrum entwickelt sich die zweite Elektronengeneration dadurch, daß die  $\gamma$ -Quanten einerseits durch COMPTON-Effekt Elektronen aus den Atomhüllen der durchstrahlten Materie herausstoßen und andererseits durch Bildung von Elektronenpaaren. Beide Anteile wurden gesondert berechnet, da sich die positiven Paarelektronen in einer WILSON-Kammer mit einem Magnetfeld abtrennen lassen. Da die Energieverteilung der negativen Paarelektronen die gleiche ist, kann also diese Komponente gesondert untersucht werden. Die COMPTON- und Paarelektronenanteile unterscheiden wir durch Indizes „C“ und „P“. In leicht verständlicher Weise erhält man dann die Beiträge zur zweiten Generation:

$$N_P^{II}(E, d) = 2 \int_0^d dt \int_{E(E, t)}^\infty dE' \int_{E'}^\infty dE_\gamma \gamma(E_\gamma, t) w_P(E_\gamma, E') \quad (69)$$

und

$$N_C^{\text{II}}(E, d) = \int_0^d dt \int_{\bar{E}(E, t)}^{\infty} dE' \int_{E'+mc^2/2}^{\infty} dE_\gamma \gamma(E_\gamma, t) w_C(E_\gamma, E') . \quad (70)$$

Darin sind  $w_P(E_\gamma, E')$  und  $w_C(E_\gamma, E')$  die Wahrscheinlichkeiten, mit denen ein Photon der Energie  $E_\gamma$  im Paarbildungs- oder COMPTON-Prozeß ein Elektron mit der Energie  $E'$  „erzeugt“:

$$\begin{aligned} w_P(E_\gamma, E') &= (71) \\ &= \frac{1}{E_\gamma} \left[ 1 - \alpha \frac{E'}{E_\gamma} + \alpha \left( \frac{E'}{E_\gamma} \right)^2 \right] \frac{1}{1 + U \cdot [E_\gamma/E'(E_\gamma - E')]} \end{aligned}$$

und

$$w_C(E_\gamma, E') = \alpha \frac{1}{E_\gamma(E_\gamma - E')} \left[ 1 + \left( \frac{E_\gamma - E'}{E_\gamma} \right)^2 \right] \quad (72)$$

mit  $\alpha = 1,358$  und  $\alpha = N Z \pi r_0^2 x_0 (\text{cm}) m c^2$ .

$\gamma(E_\gamma, t)$  ist das Photonenpektrum nach (66).  $\bar{E}(E, t)$  ist wie bei der Berechnung der ersten Generation die Energie, die ein Elektron bei  $t = 0$  mitbekommen muß, um bei  $t = 0$  im Mittel mit  $E$  anzukommen. Da die Winkel bei der Erzeugung der Elektronen der zweiten Generation andere sind als bei der ersten, sollte eigentlich  $\bar{E}$  in (69) und (70) neu berechnet werden. Darauf wurde jedoch verzichtet, da der hiervon herrührende Fehler in der Summe aller Generationen kaum merklich sein dürfte. Es wurde also (69) und (70) mit  $\bar{E}(E, t)$  nach (34 a) berechnet (vgl. Abb. 1 und 2).

Da der Beitrag der dritten und weiteren Generationen 4% kaum übersteigt (wegen der geringen mittleren Energie der Stoßelektronen), kann man die Gesamtanzahl als Summe der ersten beiden Generationen gewinnen.

Die auf diese Weise gebildete Gesamtanzahl der herauskommenden Begleitelektronen (oberhalb  $E$ ) pro  $\mu$ -Meson wurde für Kohle, Eisen und Blei in Abb. 6, 7 und 8 dargestellt.

## V. Der Einfluß der Abschneideenergie

Alle angegebenen numerischen Ergebnisse beziehen sich, wie schon in I, 2 betont, auf das  $\mu$ -Mesonenpektrum auf Seehöhe, das zwischen  $E_\mu = 3,72 \mu c^2$  und  $\infty$  auf 1 normiert wurde, was einer Abschneideenergie von 20 cm Blei entspricht. Der Wert der Abschneideenergie geht in (12) über die genaue Form von  $F(x)$  ein. Wir haben  $F(x)$  für andere Abschneideenergien  $\delta$  ( $\delta$  zwischen 2 und  $20 \mu c^2$ ) berechnet und, was für den jetzigen Zweck hinreichend

genau ist, durch die folgende Form dargestellt:

$$F(\delta, x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{a(\delta)}{a(\delta) + x}} \quad (73)$$

mit

$$a(\delta) = 25 + 42 \frac{\delta^2}{\delta + 65} \quad (73 \text{ a})$$

( $\delta$  in Einheiten  $\mu c^2$ ).

Für  $\delta \neq 3,72 \mu c^2$  sind dann die obigen Spektren mit dem folgenden Faktor  $f$  zu multiplizieren:

$$f(E, d, \delta) = \frac{\int_{\bar{E}(E, d)}^{\bar{E}(E, d)} F(\delta; x) (dt/dx) dx}{\int_{\bar{E}(E, d)}^{\bar{E}(E, d)} F(3,72; x) (dt/dx) dx} \quad (74)$$

mit

$$\bar{E}(E, d) = \left( \frac{E^2}{E+b} + \varepsilon \right) e^t - \left( \frac{E^2}{E+b} - E + \varepsilon \right). \quad (75)$$

Da  $f$  nur schwach von den Integrationsgrenzen abhängt, kann hier (33) mit  $\varrho = 1$  benutzt werden. Außerdem kann diese einfache Form hier verwendet werden, wenn man alle weiteren Effekte (Anstieg der Ionisationsbremsung, Vielfachstreuung, höhere Generationen etc.) durch Ersetzen von  $E$  durch  $E + \varepsilon$  in der unteren Grenze der Integrale (74) summarisch berücksichtigt.

$\varepsilon$  ergab sich durch Angleichung von

$$\int_{\bar{E}(E, d)}^{\bar{E}(E, d)} F(3,72; x) dt \quad \text{an} \quad N(E, d)$$

für  $E = 0$ . Dabei ist

$$\varepsilon_{\text{Pb}} = 0,66; \quad \varepsilon_{\text{Fe}} = 1,04; \quad \varepsilon_{\text{C}} = 1,68 .$$

Damit wird auch die Energieabhängigkeit so gut wiedergegeben, daß die Quotientenbildung in (74), bei der sich ein wesentlicher Teil der Ungenauigkeit heraushebt, auf einen zuverlässigen Umrechnungsfaktor führt. Man erhält so:

$$f = \Phi(E, d, \delta)/\Phi(E, d, \delta_0), \quad \delta_0 = 3,72 ,$$

mit  $a = a(\delta)$  nach (73 a)

$$\begin{aligned} \Phi(E, d, \delta) = & \left( \ln \frac{\sqrt{E+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{E+\varepsilon+a} - \sqrt{a}} - \ln \frac{\sqrt{E+a} + \sqrt{a}}{\sqrt{E+\varepsilon+a} + \sqrt{a}} \right) \\ & - \sqrt{\frac{a}{a-a_2}} \left( \ln \frac{\sqrt{E+a} - \sqrt{a-a_2}}{\sqrt{E+\varepsilon+a} - \sqrt{a-a_2}} \right. \\ & \left. - \ln \frac{\sqrt{E+a} + \sqrt{a-a_2}}{\sqrt{E+\varepsilon+a} + \sqrt{a-a_2}} \right) \quad (76) \end{aligned}$$

und  $a_2 = \frac{E^2}{E+b} - E + \varepsilon$  [vgl. (33)].

Für  $a_2 > a$  ist zu beachten, daß der letzte Term in (76) in einen  $\text{arc tg}$  übergeht.

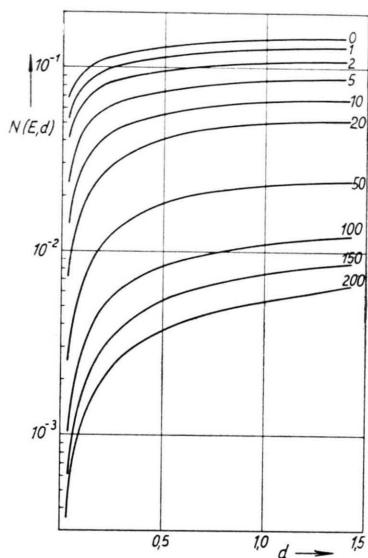


Abb. 6.

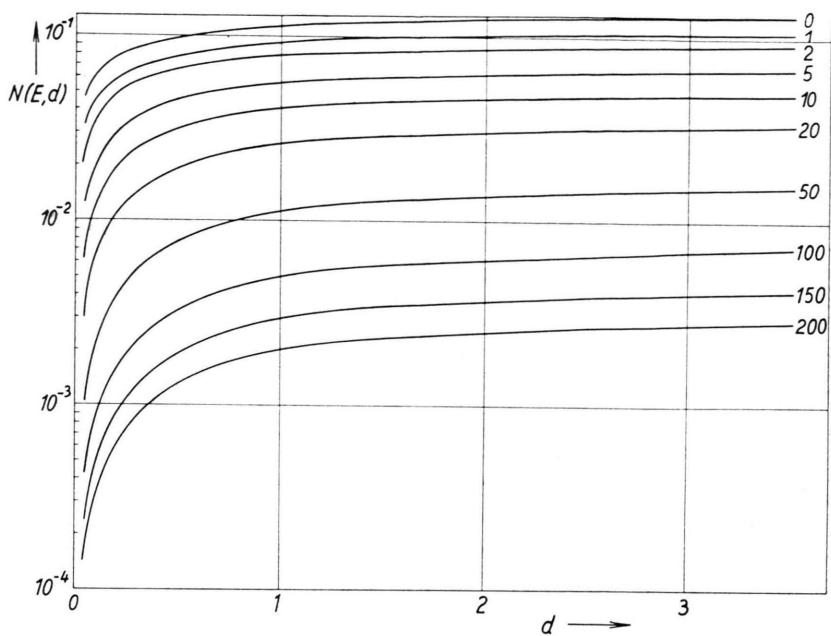
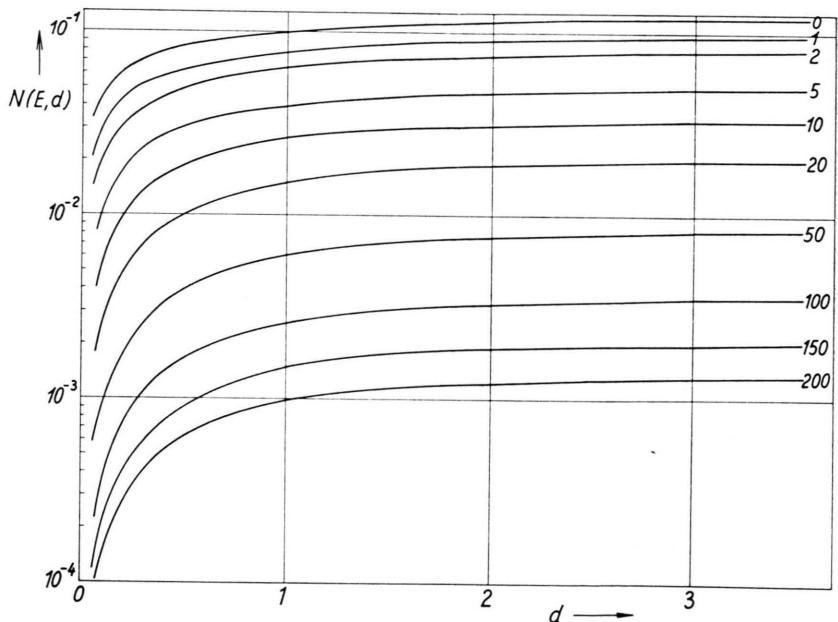


Abb. 7.

Abb. 6.  $N(E, d)$ , die Anzahl der Elektronen, die eine C-Schicht der Dicke  $d$  (in Strahlungslängen  $x_0$ ) mit einer Energie größer als  $E$  (Parameter in Einheiten  $m c^2$ ) verlassen.

Abb. 7. Wie Abb. 6 mit Fe als Absorptionsmaterial.

Abb. 8. Wie Abb. 6 mit Pb als Absorptionsmaterial. →



In Fe liegen für die Gesamtzahl der Stoßelektronen Messungen von PFEIFFER<sup>11</sup> vor, die mit den hier berechneten Werten gut übereinstimmen (vgl.

<sup>11</sup> U. PFEIFFER, Z. Naturforschg. 12a, 148 [1957].

Abb. 9). Die gestrichelte Kurve stellt die Stoßelektronen der „ersten Generation“ dar. Man sieht, daß die „höheren Generationen“ offenbar voll zur Messung gelangen, da wegen der kleinen Höhe ( $\approx 20$  cm) der von PFEIFFER benutzten WILSON-

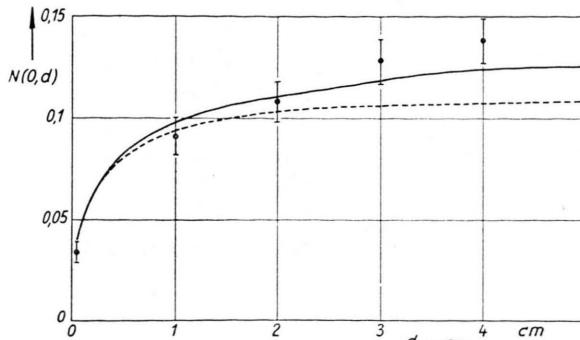


Abb. 9. Vergleich der gerechneten  $N$ -Wertekurve im Eisen mit experimentellen Ergebnissen<sup>11</sup>.

Kammer ein seitliches Weglaufen der die „zweite Generation“ erzeugenden  $\gamma$ -Quanten praktisch nicht vorkommt. Bei großen geometrischen Wegen der

$\gamma$ -Quanten wird ein großer Teil der Stoßelektronen der zweiten Generation in einem so großen seitlichen Abstand vom  $\mu$ -Meson auftreten (vgl. Beginn von Abschn. III), daß eine eindeutige Zuordnung nicht mehr möglich ist, d. h. ein hoher Prozentsatz der „zweiten Generation“ wird dann nicht gemessen. Wir verweisen für solche Fälle auf die in Abb. 1, 2 und 9 angegebenen Gesamtzahlen der direkt erzeugten Stoßelektronen.

Wir danken Herrn Prof. HEISENBERG für förderndes Interesse und ebenso Herrn Prof. WIRTZ, auf dessen Anregung diese Arbeit zustande kam.

Herrn Prof. BIERMANN möchten wir für die Erlaubnis zur Benutzung der Göttinger elektronischen Rechenmaschine G 1 danken, mit deren Hilfe numerische Auswertungen des vorliegenden Umfangs erst möglich wurden.

## Ein Phosphormodell auf quantenmechanischer Grundlage II. Übergangsmatrizen des Löschzentrums

Von HARALD STUMPF

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart  
(Z. Naturforsch. 12 a, 465—478 [1957]; eingegangen am 18. März 1957)

Das optische und elektrische Verhalten eines Phosphors, bei makroskopisch vorgegebenen Zustandsgrößen, wird durch sein Grundgitter und durch die Art und Anzahl der in ihm vorhandenen Störstellen bestimmt (§ 10). An jeder Störstelle gehen kombinierte Elektron-Gitter-Prozesse vor sich, die quantenmechanisch durch Übergangsmatrizen beschrieben werden. Die Prozesse verlaufen entweder thermisch, d. h. unter Erhaltung der Gesamtenergie des Kristalls, oder elektromagnetisch, d. h. unter Emission oder Absorption von Photonen. An einem Löschzentrum überwiegen thermische Prozesse und führen zur strahlunglosen Rekombination angeregter Elektronen und Löcher. Hier werden die thermischen Übergangsmatrizen eines solchen Zentrums, z. B. einer S<sup>2-</sup>-Lücke in ZnS, für den Elektronen-Einfang und die Ionisation aus dem Grundzustand des Zentrums in das Leitungs- und Valenzband berechnet. Die nichtadiabatischen Wechselwirkungsglieder des Kristalls bestimmen die Übergangsmatrizen. Zu ihrer Berechnung werden die Auswahlregeln für FRANCK-CONDON-Integrale bei beliebigen Nullpunktverschiebung der Oszillatoren angegeben (§ 11), unter der Annahme verschwindender Dispersion im longitudinalen optischen Zweig der Gitterschwingungen geeignete Eigenschwingungen abgeleitet (§ 12), der Grundzustand der Störstellenwellenfunktion des Elektrons (§ 13) und danach die Störstellenelektron-Gitter-Kopplung (§ 14) eingeführt. Daraus lassen sich die Nullpunktverschiebungen der Gitter-Oszillatoren ableiten (§ 15). Die berechneten Matrizen folgen in § 16. Die optischen Übergangsmatrizen verschwinden in dieser Näherung vollständig. Diese Eigenschaften hängen wesentlich vom s-Funktionscharakter des Grundzustandes ab. Jedoch darf dies nicht als hinreichendes Kriterium für das Funktionieren eines Zentrums als Löschzentrum betrachtet werden, da noch weitere Größen, wie die energetische Höhe des Grundniveaus, Rekombinationen über angeregte Zustände, die Konzentration der Leitungsbandedelektronen usw. das Gesamtverhalten bestimmen. Am Schluß werden in einer vergleichenden Tabelle die Annahmen anderer Autoren sowie bereits berechnete Fälle von Übergangsmatrizen einander gegenübergestellt.

### § 10. Einfachstes Phosphormodell<sup>1</sup>

Wird ein Phosphor durch Absorption von Licht oder Energieaufnahme aus einer Teilchenstrahlung vom Grundzustand in einen angeregten Zustand ver-

setzt, so verläßt ein Bruchteil der Anregungsenergie den Kristall wieder als Fluoreszenz- und Phosphoreszenzstrahlung, während die übrige Energie in Wärme verwandelt wird. Zugleich mit der Energiespeicherung, die allmählich durch Phosphoreszenzstrahlung abgebaut wird, tritt in vielen Fällen licht-elektrische Leitung auf. Aus der Herstellungsweise

<sup>1</sup> §§ 1 bis 9 siehe H. STUMPF, Z. Naturforsch. 12 a, 153 [1957]; im folgenden mit I zitiert.